☆金星の明るさ（２０２０年）

「宵の明星」、「明けの明星」と呼ばれる惑星の「金星」は、とても明るいので、肉眼でも点状に輝く星として比較的簡単に見つけることができる天体です。これを望遠鏡で観察すると、図１のように欠けて見えることがあります。金星は太陽光を反射して光るため、満ち欠けをするのです。（図２参照）

図1　欠けた金星

電球などは近づくほど大きく明るく見えますが、金星の場合は形が変化するのですこし複雑になります。

金星が一番遠くなるのは、地球－太陽－金星と直線上に並ぶ時（外合）で、円形に光りますが、遠くにあるため見かけの大きさは小さくあまり明るくありません。

地球に近づくに伴ってだんだん大きく明るく見えるようになりますが、形は近づくほど欠けてきます。

金星が地球に最も近づく、地球－金星－太陽と並ぶ時（内合）には、金星の影の半球側を見るので、新月のように見ることができません。

明るさの変化を詳しく計算すると、金星が一番明るく輝くのは太陽から約４０度離れた時で、内合よりも前後に３６日ほどずれます。

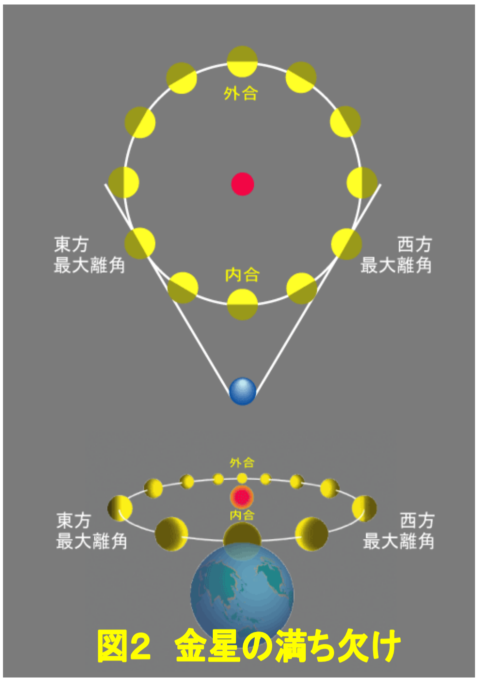

図2　金星の満ち欠け

２０２０年の金星

３月２５日　東方最大離角　４６度５分角
４月２８日　最大光度（－４．５等）
６月０４日　内　合
７月１０日　最大光度（－４．５等）
８月１３日　西方最大離角　４５度４７分角
※明るさの変化　－３．７等～－４．５等

【チャレンジしよう！】

最大光度になる位置を計算してみましょう。（三角関数とｘの微分などを使います。）

・金星の満ち欠け

金星は太陽の光を反射して光るため、地球・太陽・金星の位置関係によりその形が変化して見えます。
地球と金星の距離をｘ、地球と太陽の距離をＲ、金星と太陽の距離をｒとし、ｘとｒの間の角を ａ として、光っている部分の面積を求めてみましょう。（図３参照）

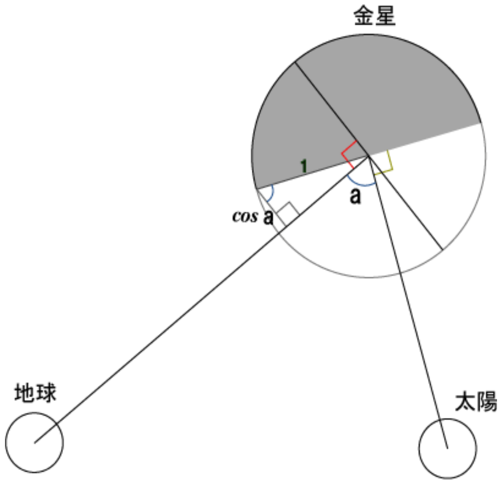

図3　地球から見た金星

金星が満月のように丸く光っているときの面積は、金星の半径を１として、

１×１×π（半径×半径×円周率）＝π　　・・・①

影と輝いている部分の境界線は、図４のように一定の比率でつぶしただ円の半周になります。いま、地球－金星－太陽間の角度をａで表すと、このつぶれる比率は、図３のように、$\frac{\cos a}{1} = \cos a$

となります。
光っている部分の面積は、半円の面積とだ円の半分の面積を合わせたものです。（このだ円は半円を右方向に $\cos a$ 倍したものなので、その面積も「半円の面積の $\cos a$ 倍」になります。）

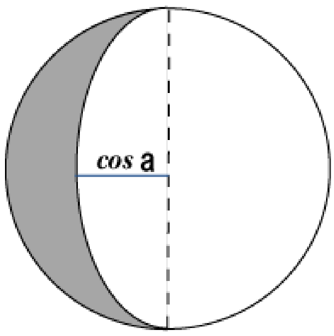

図4　金星の輝く面積

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\times\cos a = \frac{\pi}{2}(1+\cos a) \quad ・・・②$$

（半円の面積）　（だ円の半分の面積）
これらの比は、①÷②から

$$\frac{1}{2}(1+\cos a) \quad ・・・③$$

この光っている面積の割合を『位相』と言います。

・金星の明るさ L

太陽に近いほど強い光が金星にあたるので、金星の明るさは金星と太陽の距離 r の二乗に反比例します。

また、上で求めた金星の光っている部分の面積　$\frac{1}{2}(1+\cos a)$　に比例します。

さらに、地球と金星の距離 x の二乗に反比例します。以上から金星の明るさ L は、

$$L = c \times \frac{1}{r^2} \times \frac{1}{2}(1+\cos a) \times \frac{1}{x^2} \qquad （c は比例定数） \qquad ・・・④$$

ここで、図５のような、地球、太陽、金星を頂点とする三角形について、余弦定理から

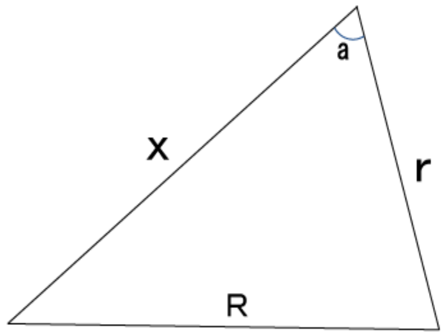

図5　地球･太陽･金星の位置関係1

$R^2 = x^2 + r^2 - 2xr\cos a$ 、$\cos a = \dfrac{x^2 + r^2 - R^2}{2xr}$　、

$1+\cos a$　に代入して $\cos a$ を消すと、

$$1+\cos a = 1 + \frac{x^2 + r^2 - R^2}{2xr} = \frac{x^2 + 2xr + r^2 - R^2}{2xr} = \frac{(x+r-R)(x+r-R)}{2xr} \qquad ・・・⑤$$

④に⑤を代入すると、

$$L = c \times \frac{1}{r^2} \times \frac{1}{2}\frac{(x+r-R)(x+r+R)}{2xr} \times \frac{1}{x^2} = \frac{c}{4}\frac{(x+r-R)(x+r+R)}{x^3 r^3}$$

となり、金星の光度 L は、距離がわかれば計算することができます。

光度の増加率が 0 になる時（　$\frac{dL}{dx} = 0$　）に最大の光度になるので、

r と R を一定として、$\dfrac{d\left\{\dfrac{(x+r-R)(x+r+R)}{x^3}\right\}}{dx} = 0$

展開して整理すると、$\dfrac{d\left\{\dfrac{1}{x^3}\left(x^2 + 2rx + r^2 - R^2\right)\right\}}{dx} = 0$　，　$\dfrac{d\left\{x^{-1} + 2rx^{-2} + \left(r^2 - R^2\right)x^{-3}\right\}}{dx} = 0$

$$-x^{-2} - 4rx^{-3} - 3\left(r^2 - R^2\right)x^{-4} = 0$$

$-x^4$　を両辺にかけて、

$$x^2+4r+3\left(r^2-R^2\right)=0、\quad x=\frac{-4r\pm\sqrt{\left(4r\right)^2-4\times3\times\left(r^2-R^2\right)}}{2}$$

地球から金星までの距離 x は、負になることは無いから、

$$x=\frac{-4r+\sqrt{16r^2-4\times3\times\left(r^2-R^2\right)}}{2}$$

地球・太陽間の距離 R を１．０００とすると、金星・太陽間の距離 r は０．７２３３となる。これを上式に代入して、最大光度になる x を求めると、ｘ＝０．４３０４が得られる。

地球から見た太陽と金星の間の角（金星の離角）を f とすると、余弦定理から、

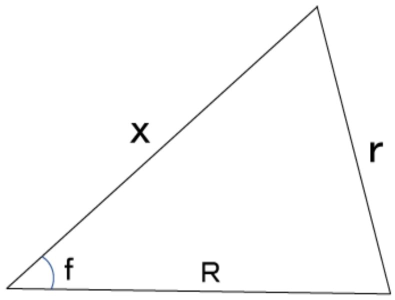

図6　地球･太陽･金星の位置関係2

$$r^2=x^2+R^2-2xR\cos f$$

$$\cos f=\frac{x^2+R^2-r^2}{2xR}=\frac{0.4304^2+1^2-0.7233^2}{2\times0.4304\times1}=0.7691$$

$$f=39.7^\circ$$

つまり、金星が太陽から約４０度離れたところで最大光度になります。

※この計算では、R と r が一定と仮定していますが、実際にはわずかに変化します。また、金星表面からの太陽光の反射が、場所によって強弱が無いとして計算しました。